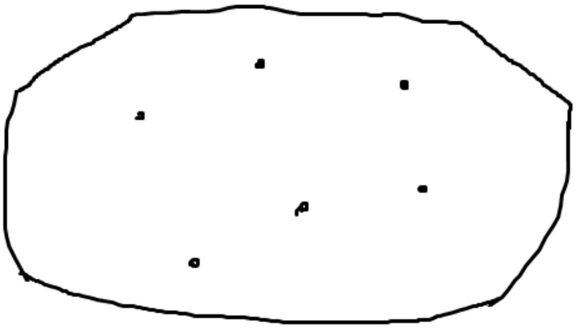
Немного математики from Badyin and Shestopalov: Многообразия и карты

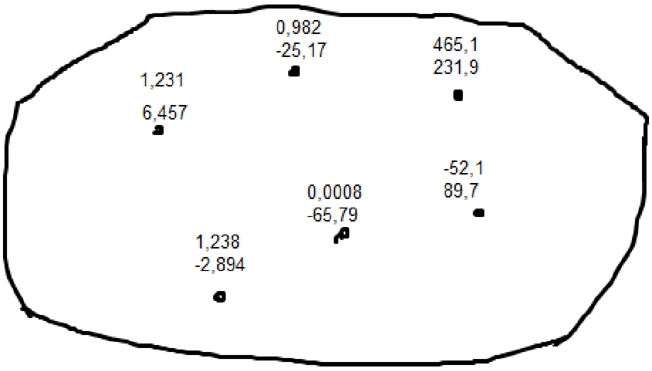
Представить себе четырёхмерное пространство-время сложно, а искривлённое – ещё сложней.

Быть может, вам поможет математическая абстракция, которую предлагают Бадьин и Шестопалов.

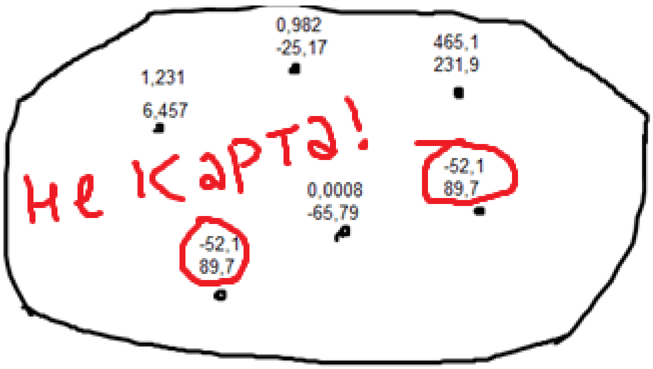
Есть множество M – событий пространства-времени. Это точки множества M:



Картой (системой координат) называется ***взаимнооднозначная*** функция, ставящая каждой точке столбец из N действительных чисел (здесь N=2, столбцы из двух чисел):



Требование взаимооднозначности обязательно:

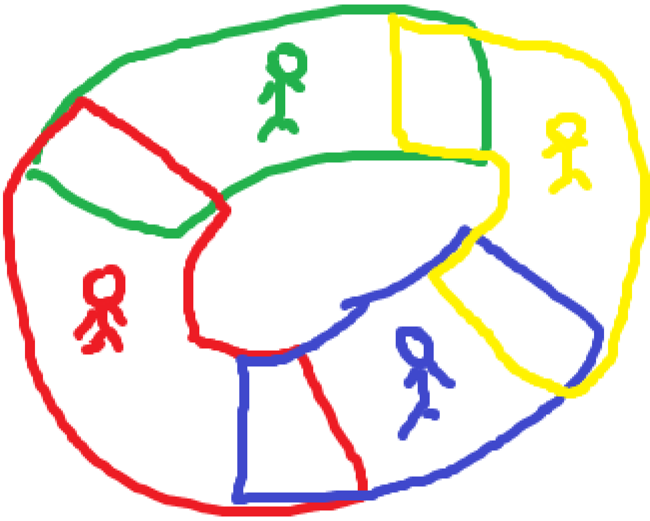


Не всякое подобное отображение есть карта. Ещё нужно, чтобы бесконечно близкие события описывались бесконечными близкими столбцами.

Ну там чтобы события «Физфак, 18:10 3.08.2022» и «химфак, 18:11 3.08.2022» описывались близкими столбцами.

Формально это требование описать очень сложно (тут математики вводят костыль в виде топологии: если кратко, то они вводят понятие открытых множеств на многообразии M (безотносительно карты) и требуют, чтобы карта переводила открытое множество на M в открытое множеств в R^N), но интуитивно это требование понятно.

Ещё иногда покрывают множество M картами-лоскутками, каждая из которой покрывает лишь часть многообразия:



Тогда совокупность карт-СК называют атласом. Впрочем, нам будет хватать одной карты, описывающей всё пространство-времени.

Вот такая вот математическая интерпретация искривлённого пространства-времени. А система координат (СК) – это просто функция, ставящая в соответствие каждому событию столбец R^4 .

Возвращение к физике: неинерциальные СК

Как вы знаете, СТО хорошо работала с инерциальными СК, но насчёт неинерциальных? А давайте сейчас и посмотрим.

Была инерциальная СК ct,x,y,z с метрическим двензором g_{ik}

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

Мы перешли в новую СК

$$CT = ct, X = x + \frac{a}{2}(ct)^2, Y = y, Z = z$$

Как мы видим, одна двигается с постоянным ускорением a относительно предыдущей. Какой будет у неё матрица метрического двензора?

Давайте обозначать маленькими буквами всё из инерциальной СК, крупными – всё из неинерциальной.

$$\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} g_{ik}dx^i dx^k = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} G_{ik}dX^i dX^k$$

$$g_{00}dx^0dx^0 + 2g_{10}dx^0dx^1 + g_{11}dx^1dx^1 = G_{00}dX^0dX^0 + 2G_{01}dX^0dX^1 + G_{11}dX^1dX^1$$

$$(dct)^2 - dx^2 = G_{00}(dCT)^2 + G_{11}(dX)^2 + 2G_{01}dXdCT$$

Подставляем X:

$$(dct)^2 - dx^2 = G_{00}(dct)^2 + 2G_{01}d\left(x + \frac{a}{2}(ct)^2\right)dct + G_{11}\left(d\left(x + \frac{a}{2}(ct)^2\right)\right)^2$$

Преобразуем последнее слагаемое:

$$(dct)^2 - dx^2 = G_{00}(dct)^2 + 2G_{01}(dx + actdct)dct + G_{11}(dx + actdct)^2$$

Раскрываем скобки:

$$(dct)^2 - dx^2 = G_{00}(dct)^2 + 2G_{01}(dxdct + actdct^2) + G_{11}(dx^2 + 2actdxdct + a^2(ct)^2dct^2)^2$$

Группируем слагаемые:

$$(dct)^2 - dx^2 = (G_{00} + 2actG_{01} + a^2(ct)^2G_{11})(dct)^2 + (2G_{01} + 2actG_{11})dxdct + G_{11}dx^2$$

Откуда получаем систему:

$$G_{11} = -1$$
$$G_{01} + actG_{11} = 0$$
$$G_{00} + 2actG_{01} + a^2(ct)^2G_{11} = 1$$

Откуда

$$G_{11} = -1$$
$$G_{01} = act$$
$$G_{00} + 2act(act) + a^2(ct)^2(-1) = 1 => G_{00} = 1 - (act)^2$$

Итого получаем, что матрица метрического двензора в неинерциальной СК имеет вид

$$\begin{matrix} 1-(act)^2 & act & 0 & 0 \\ act & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

У нас, правда, время t из старой СК, так что надо перевести в новую:

$$\begin{matrix} 1-(acT)^2 & acT & 0 & 0 \\ acT & -1 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$$

Какой итог? ***В плохой СК (неинерциальной) и метрический двензор имеет плохой вид.***

жалкая пародия

Наша Таня громко плачет:
Уронила в речку мячик.
— Тише, Танечка, не плачь:
Не утонет в речке мяч.

неповторимый оригинал

Из глаз Тани льются ливни:
«Матрица метрики протиивная!»
Тише, Танечка, всё нормально!
Просто ты в карте неинерциальной!

В старой СК уравнение геодезичской имело вид:

$$ct = ct_0 + \beta_t s\ , x = x_0 + \beta_x s,$$

Т.е. прямой. А в неинерциальной СК мировой линией будет парабола:

CT, Y, Z равны $ct, y, z,$

$$X = x + \frac{a}{2}(ct)^2 = x_0 + \beta_x s + \frac{a}{2}(\, ct_0 + \beta_t s)^2$$

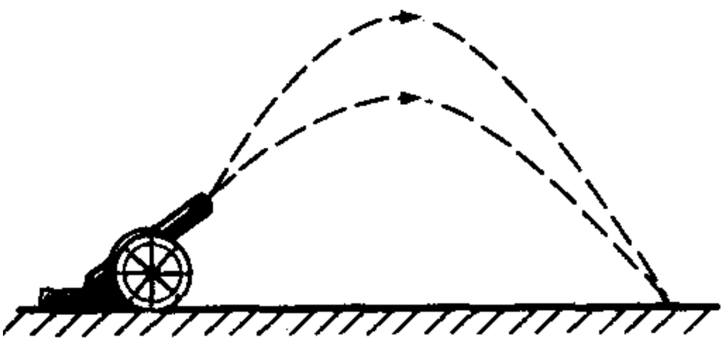
$$= x_0 + \frac{a(ct_0)^2}{2} + act_0\beta_t s + \beta_t^2 s^2$$

Давайте сделаем гипотезу.

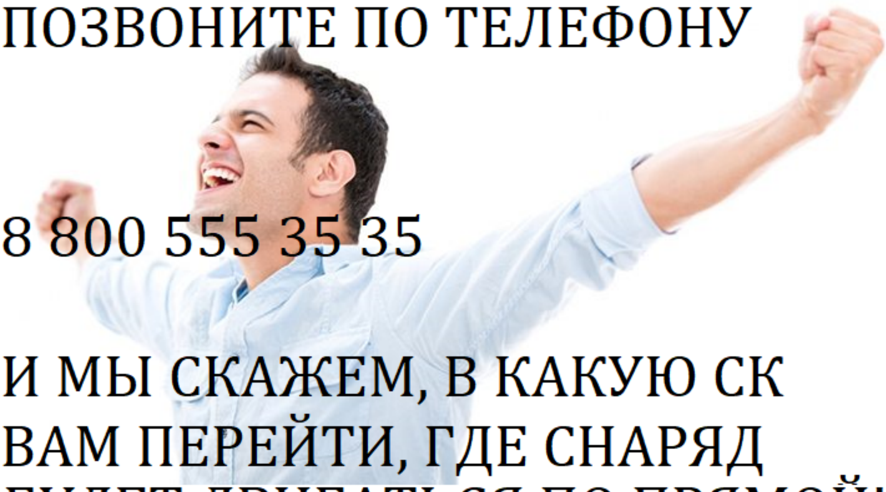
Массы (ненулевой тензор энергии импульса T_{ik}) вызывают изменение метрике (в данной точке пространства-времени). Именно изменением метрики обусловлено возникновение ускорения.

у этой гипотезы есть важный момент: пространство-время НЕ искривляется, просто та метрика, которую мы считали «хорошей», становится «плохой», если вдруг появляются массы.

А метрика – это свойство исключительно СК. Т.е. «царь хороший, а бояре плохие». Пространство-время (и никуда не искривляется) хорошее, а вот СК плохая. Но надо просто перейти в хорошую СК – и всё станет ОК.



Ваш снаряд летит по параболе, а не по прямой линии?
Это всё патамушта у вас плохая СК!



ПОЗВОНИТЕ ПО ТЕЛЕФОНУ

8 800 555 35 35

И МЫ СКАЖЕМ, В КАКУЮ СК
ВАМ ПЕРЕЙТИ, ГДЕ СНАРЯД
БУДЕТ ДВИГАТЬСЯ ПО ПРЯМОЙ!

Так вот, это всё ***неправда***, хотя очень правдоподобно. Из-за масс пространство-время становится истинно искривлённым, и мы не можем там ввести никакую «хорошую» СК.

Т.е.:
Мы перешли в плохую СК -> метрика поменялась
Мы добавили массы -> метрика поменялась
Но если в неинерциальной СК мы могли перейти назад в инерциальную СК, то с массами такой фокус не пройдёт.